Princeton Plasma Physics Laboratory

PPPL-4260 PPPL-4260

Reconstruction of q- and p-profiles in ITER using External and Internal Measurements

(in Russian)

Leonid E. Zakharov, Elizabeth L. Foley,
Fred M. Levinton, and Howard Y. Yuh

August 2007

Prepared for the U.S. Department of Energy under Contract DE-AC02-76CH03073.

Princeton Plasma Physics Laboratory
Report Disclaimers

Full Legal Disclaimer

This report was prepared as an account of work sponsored by an agency of the United States Government. Neither the United States Government nor any agency thereof, nor any of their employees, nor any of their contractors, subcontractors or their employees, makes any warranty, express or implied, or assumes any legal liability or responsibility for the accuracy, completeness, or any third party's use or the results of such use of any information, apparatus, product, or process disclosed, or represents that its use would not infringe privately owned rights. Reference herein to any specific commercial product, process, or service by trade name, trademark, manufacturer, or otherwise, does not necessarily constitute or imply its endorsement, recommendation, or favoring by the United States Government or any agency thereof or its contractors or subcontractors. The views and opinions of authors expressed herein do not necessarily state or reflect those of the United States Government or any agency thereof.

Trademark Disclaimer

Reference herein to any specific commercial product, process, or service by trade name, trademark, manufacturer, or otherwise, does not necessarily constitute or imply its endorsement, recommendation, or favoring by the United States Government or any agency thereof or its contractors or subcontractors.

PPPL Report Availability

Princeton Plasma Physics Laboratory:

http://www.pppl.gov/techreports.cfm

Office of Scientific and Technical Information (OSTI):

http://www.osti.gov/bridge

Related Links:

U.S. Department of Energy

Office of Scientific and Technical Information

Fusion Links

Реконструкция профилей q и p в ИТЭРе с использованием внешних и внутренних измерений

(Reconstruction of q- and p-profiles in ITER using external and internal measurements)

Леонид Е. Захаров*

*Лаборатория физики плазмы Принстонского университета,
MS-27 P.O. Box 451, Princeton NJ 08543-0451*

Элизабет Л. Фолей†, Фред М. Левинтон†, и Ховард Ю. Юх†

†*Nova Photonics, P.O. Box 451, Princeton NJ 08543-0451*

Leonid E. Zakharov

Princeton University, PPPL, MS-27 P.O.Box 451 Princeton NJ 08543-0451

Elizabeth L. Foley, Fred M. Levinton, Howard Y. Yuh

Nova Photonics, P.O. Box 451, Princeton NJ 08543-0451

Аннотация

В статье дана методика определения погрешностей в реконструкции профилей q и p в установке ИТЭР при реконструкции равновесия на основе внешних магнитных измерений и измерений поляризации (MSE-LP) и сдвига (MSE-LS) линии Штарка возбуждённого нейтрального атома в пучке нейтральной инжекции внутри плазмы. Показано, что как MSE-LP, так и недавно предложенные компанией Nova Photonics MSE-LS сигналы существенно улучшают восстановление профилей, определяющих магнитную конфигурацию плазмы.

A method of calculation of uncertainties in equilibrium reconstruction of q- and p-profiles in ITER using external magnetic measurements as well as signals from the plasma core on the Motion Stark line polarization (MSE-LP) and line shift (MSE-LS) is described. It is shown that recently proposed by Nova Photonics use of MSE-LS signal significantly improves the reconstruction of plasma profiles, which determine the magnetic configuration.

*Electronic address: `zakharov@pppl.gov`

I. Введение

В отсутсвие прямых методов измерения плотности тока или профиля запаса устойчивости в токамаках, на практике, магнитная конфигурация восстанавливается[1–3] на основе решения уравнения Грэда-Шафранова (ГрШ)[4, 5], в котором правая часть и форма граничной поверхности плазмы подгоняются под измерения магнитного поля снаружи от плазмы. Дополнительную информацию, ограничивающую диапазон возможных решений, дают измерения, если они имеются, положения резонансных магнитных поверхностей, питч-угла магнитного поля на основе сигнала о поляризации линии Штарка [6] или Фарадеевского вращения поляризованного света пронизывающего плазму[7–10]. Помимо самой задачи подгонки решения уравнения ГрШ под измерения, всегда встаёт вопрос о том насколько уникальной является реконструкция равовесия и как широк класс других равновесий, которые могли бы удовлетворить тому же набору измерений в пределах их точности.

Недавно авторами была развита теория и численный метод (которые в более подробном изложении будут опубликованы отдельно), дающие возможность расчёта всего набора возмущений границы плазмы и распределения тока. Это позволило на основе количественного критерия расделить возмущения (вариации) на а) хорошо заметные на диагностиках, б) мало заметные и в) невидимые. В данной работе эта методика применена для анализа полезности сигнала о смещении линии Штарка излучения возбуждённого атома в пучке нейтральной инжекции (сигнал MSE-LS) для реконструкции равновесия, что было недавно предложено группой соавторов этой работы из компании Nova Photonics для установки ИТЭР. В то время как сигнал о поляризации линии Штарка (сигнал MSE-LP), широко используемый для определения запаса устойчивости в токамаках, возможно не будет доступен в ИТЭРе, сильное магнитное поле (5.6 Т) и энергичный пучок нейтральной инжекции (1 МеВ) в этой установке позволяют с хорошей точностью измерять смещение линии Штарка. В отличие от сигнала MSE-LP, которое имеет ясную интерпретацию “питч” угла, связанного с запасом устойчивости q, сигнал MSE-LS соответствует поперечной к пучку компоненте магнитного поля, которая на прямую не выражается через исходные параметры магнитной конфигурации. Только специальная численная методика может оценить полезность этого сигнала для реконструкции равновесия.

Секция II данной работы приводит основные понятия теории вариаций при реконструкции равновесия и схему их вычисления. Секция III содержит результаты расчёта вариаций, понимаемых здесь как неопределённости, остающиеся после реконструкции, в профилях тока, запаса устойчивости q и давления плазмы p. В данной работе сделано предположение, что граница плазмы известна и проблема заключается только в реконструкции внутренних профилей. Влючение восстановления границы плазмы, которое, хотя и не представляет принципиальных сложностей в рамках подхода данной работы, является отдельной, довольно громоздкой задачей. Оно потребовало бы рассмотрения множества деталей, связанных с внешними магнитными измерениями, специфичными для данной машины (которые находятся ещё в процессе развития для ИТЭРа). В отличие от восстановления границы, точность которого определяется исключительно точностью измерений и возможностью оптимального расположения зондов, восстановление внутренних профилей представляет плохо обусловленную задачу, возможные вариации решения которой могут слабо зависеть от точности измерений. Именно это обстоятельство требует внутренних измерений и анализа их потенциального вклада в ограничение неопределённостей в решении.

Заключительная секция IV подчёркивает возможность использования сигнала MSE-LS для реконструкции равновесия в ИТЭРе и перечисляет вопросы, требующие более детального рассмотрения.

II. Вариации в реконструкции равновесия и их вычисление

Магнитная конфигурация плазмы токамака с высокой точностью описывается уравнением Грэда-Шафранова

$$\Delta^*\bar{\Psi} = \frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial r} + \frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial z^2} = -\ T(\bar{\Psi}) - r^2 P(\bar{\Psi}), \quad \bar{\Psi} \equiv \tfrac{\Psi}{2\pi}, \quad T \equiv \bar{F}\tfrac{d\bar{F}}{d\bar{\Psi}}, \quad P \equiv \frac{d\bar{p}}{d\bar{\Psi}} \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{pol} + \frac{1}{r}\bar{F}(\bar{\Psi})\mathbf{e}_\phi, \quad \bar{F} \equiv rB_\phi, \quad \mathbf{B}_{pol} = \frac{1}{r}(\nabla\bar{\Psi}\times\mathbf{e}_\phi), \quad \bar{p} = \mu_0 p(\bar{\Psi}), \qquad (2)$$

Здесь, r, ϕ, z - цилиндрические координаты, Ψ- полоидальный магнитный поток, $\mathbf{B}_{pol}, B_\phi$ - тороидальное магнитное поле, p- давление плазмы, $\mu_0 = 0.4\pi 10^{-6}$. Плотность

тороидального тока $j_\phi(r,\bar{\Psi})$имеет вид

$$\bar{j}_\phi(r,\bar{\Psi}) \equiv \mu_0 j_\phi = \frac{1}{r}T + rP \tag{3}$$

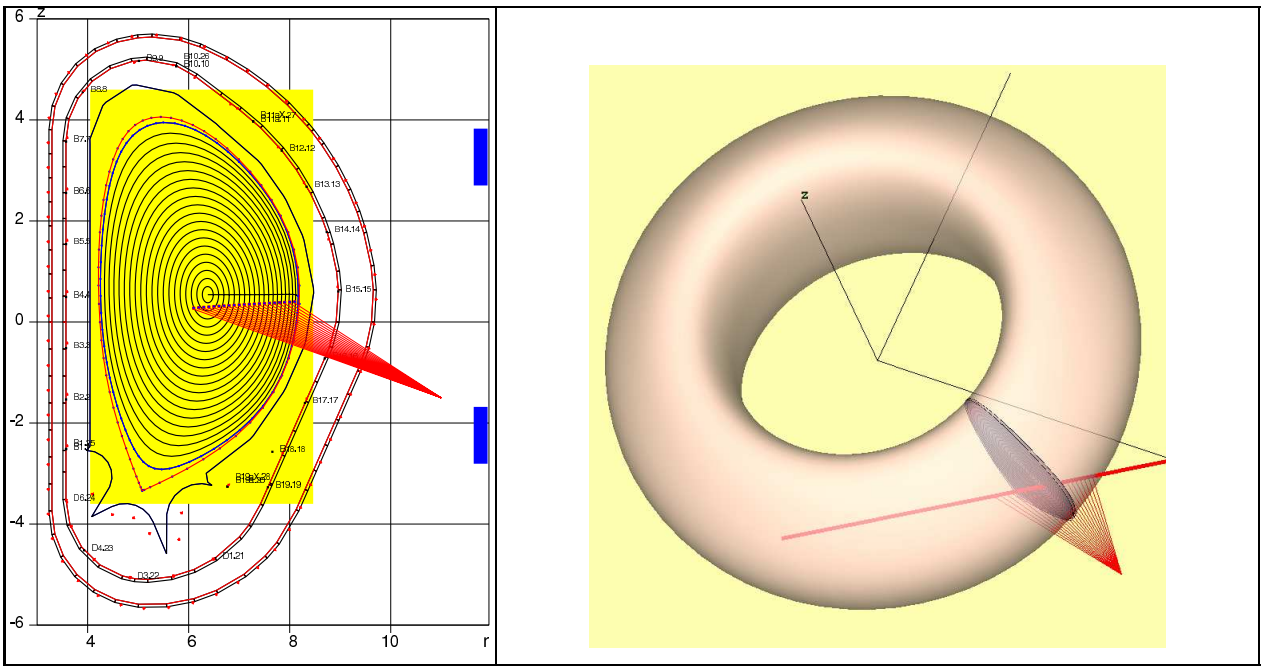
В дальнейшем будет использовано эквивалентное, и в тоже время более удобное для интерпретации, представление плотности тока в виде

$$\bar{j}_\phi(a,r) = \frac{R_0}{r}\bar{j}_s(a) = \left(\frac{r}{R_0} - \frac{R_0}{r}\right)\bar{j}_p(a), \quad \bar{j}_p \equiv R_0 P, \quad \bar{j}_s \equiv \frac{T}{R_0} + R_0 P, \tag{4}$$

где R_0 - радиус магнитной оси, - координата малого радиуса, связанная с магнитной поверхнстью, $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(a)$, а функции $\bar{j}_s(a), \bar{j}_p(a)$ имеют размерность плотности тока и соответствуют цилиндрическому вкладу в плотность тока и тороидальной поправке соответсвенно.

Уравнение (1) эллиптическое и его решение $\bar{\Psi}(r,z)$ однозначно определяется граничными условиями и двумя функциями одной переменной $T(\bar{\Psi}), P(\bar{\Psi})$ в правой части, или $\bar{j}_s(a), \bar{j}_p(a)$, которые описывают распределение тока в плазме. Соответственно, вариации равновесной конфигурации сводятся к неточностям в определении границы плазмы и двух профилей $\bar{j}_s(a), \bar{j}_p(a)$.

Настоящая статья сосредоточена на определении неточностей в плотности тока и связанных с ней профилях запаса устойчивости q и давления p на примере магнитной конфигурации ИТЭРа с полем $B_\phi = 5.6$ Т и током 15 МА. Граница плазмы считается заданной и соответствующей стандартной конфигурации ИТЭРа (Рис.1а).



а)	б)

Рис.1 *Иллюстративный пример диагностики для равновесной конфигурации ИТЭРа с 32 Ψ-петлями, 64 B_{pol}- локальными зондами, Φ-диамагнитной петлёй и 21 точечным источником сигналов MSE. a) сечение плазмы в ИТЭРе (b) Центральная линия 1 МеВ пучка нейтральной инжекции в ИТЭРе задающая положение точек сбора сигналов MSE.*

Теория вариаций предполагает что реконструкция равновесия уже сделана, в результате чего форма плазме и профили $\bar{j}_s(a), \bar{j}_p(a)$ получены. Вопрос, на который отвечает теория вариаций состоит в том, насколько уникальным является полученное равновесие при заданной точности измерений.

Такая проблема может быть сведена к линейному анализу влияния возмущений равновесия (вариаций) на сигналы диагностик. Все возможные вариации охватываются возмущениями границы и двух функций $\bar{j}_s(a), \bar{j}_p(a)$.

Для определения их воздействия на сигналы, неоходимо решить линеаризованное уравнение Грэда-Шафранова

$$\bar{\Psi} = \bar{\Psi}_0 + \psi, \quad \Delta^*\psi + \frac{dT}{d\bar{\Psi}}\bigg|_{\bar{\Psi}_0}\psi + r^2\frac{dP}{d\bar{\Psi}}\bigg|_{\bar{\Psi}_0}\psi = -\delta T - r^2\delta P \tag{5}$$

для полного набора возмущений $\delta T, \delta P$ (или $\delta\bar{j}_s(a), \delta\bar{j}_p(a)$) и всех возможных возмущений границы плазмы $\xi(\theta)$, которые могут быть представлены как суперпозиция

$$\xi(\theta) = \sum_{n=0}^{n<N_\xi} A_n \xi^n(\theta), \quad \delta\bar{j}_s = \sum_{n=0}^{n<N_J} J_n f^n(a), \quad \delta\bar{j}_p = \sum_{n=0}^{n<N_P} P_n f^n(a) \tag{6}$$

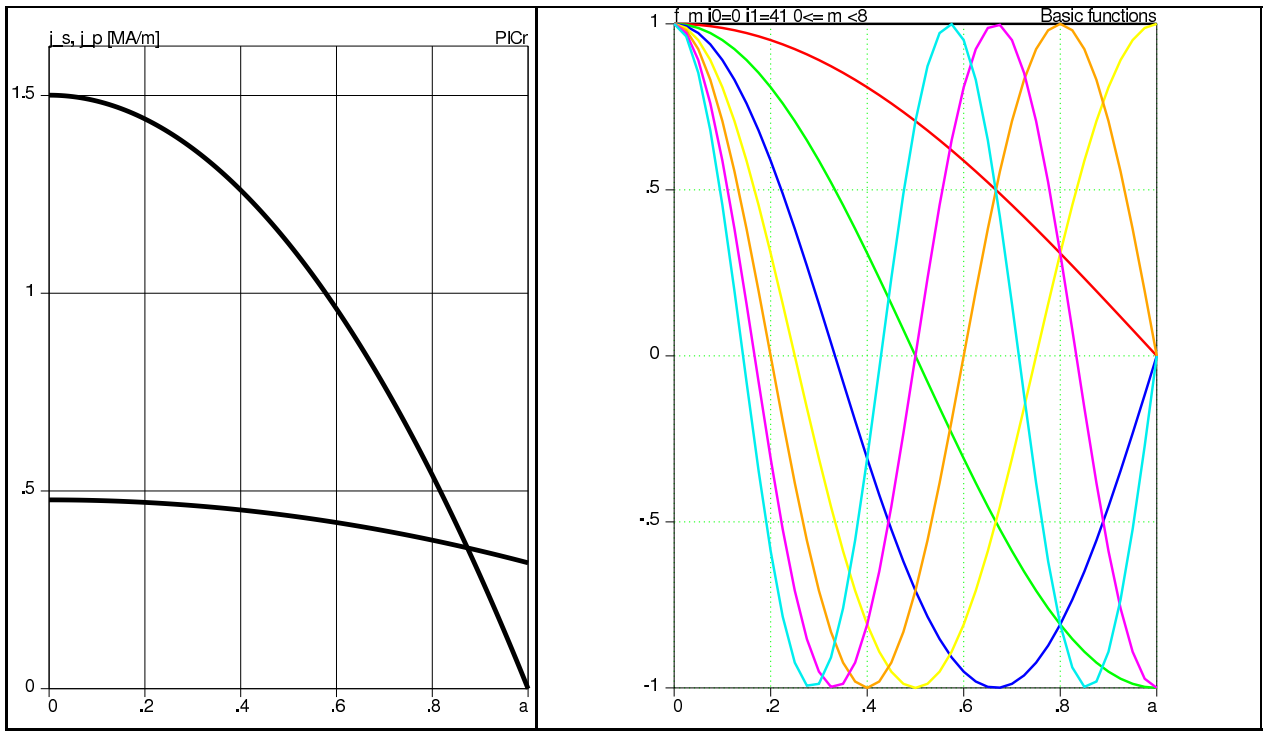
элементарных возмущений, например,

$$\xi^{2k} = \cos k\theta, \quad \xi^{2k+1} = \sin k\theta, \quad f^n = \cos\frac{n\pi a}{2}, \tag{7}$$

где θ-полоидальный угол определенный вдоль контура плазменной границы и $0 \leq a \leq 1$-нормализованная радиальная координата внутри плазмы (в данной работе определённая как корень квадратный из нормализованного тороидального потока магнитного поля). Возмущения с высокими k, начиная с некоторого, дают сигналы, которые "невидимы" на диагностиках в пределах их точности. Как следствие, количество елементарных возмущений является конечным, с полным их числом N

$$N = N_\xi + N_J + N_P \tag{8}$$

достаточным, чтобы определить границу нечувсвительности, которая, фактически, является оценкой качества диагностики. В данной работе считется, что $N_\xi = 0, \xi = 0$. На Рис.2а показаны функции $\bar{j}_s(a), \bar{j}_p(a)$ для "базового" распеределения тока. Элементарные возмущения $f^n(a)$ показаны на Рис.2б.



а)	б)

Рис. 2. *Базовое распределение плотностей тока* $\bar{j}_s(a), \bar{j}_p(a)$. *б) Профили базисных функций* $f^n(a)$ *для "элементарных" возмущений.*

Численный код, например ESC[11], может решить уравнение (5) для всех элементарных возмущений и связать вектор $\vec{X}$, состоящий из коэффициентов при возмущениях в формулах (6)

$$\vec{X} = \left\{ \underbrace{A_0, A_1, \ldots, A_{N_\xi - 1}}_{N_\xi \ of \ \ \xi^n}, \underbrace{T_0, \ldots, T_{N_J - 1}}_{N_J \ of \ \ \delta T^n}, \underbrace{P_0, \ldots, P_{N_p - 1}}_{N_p \ of \ \ \delta P^n} \right\} \tag{9}$$

с набором сигналов δS_m на диагностиках

$$\delta \vec{S} = \left\{ \delta \underbrace{\Psi_0, \delta\Psi_1, \ldots, \delta\Psi_{M_\Psi - 1}}_{M_\Psi \ of \ \ \delta\Psi^m}, \underbrace{\delta B_0, \ldots, \delta B_{M_B - 1}}_{M_B \ of \ \ \delta B^m_{pol}}, \underbrace{\delta S_0, \ldots, \delta S_{M_S - 1}}_{M_S \ of \ \ other \ signals} \right\} \tag{10}$$

с помощью матричного соотношения

$$\delta \vec{S} = \mathbf{A}\vec{X}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_{M \times N}, \quad M = M_\Psi + M_B + M_S \tag{11}$$

Здесь M_Ψ- число сигналов с петель магнитного потока, M_B - число сигналов с локальных магнитных зондов, M_S - число остальных сигналов, используемых для реконструкции равновесия. Обычно, $M > N$.

Матрица “отзыва” $\mathbf{A}$, вычсисленная для представительного набора возмущений представляет конечный продукт расчёта равновесия в теории вариаций. После этого анализ матричной проблемы является общим и для других проблем реконструкции источников по измерениям и сводится к обращению матрицы отзыва.

Это производится в последующем порядке. Сначала каждая строка матрицы отзыва нормализуется в соответствии с точностью соответствующего ей сигнала

$$(\bar{\mathbf{A}})_m^{0\leq n<N} \equiv \frac{1}{\epsilon_m}(\mathbf{A})_m^{0\leq n<N}, \quad \delta\bar{S}_m \equiv \frac{1}{\epsilon_m}\delta S_m \tag{12}$$

давая нормализованную матрицу отзыва $\bar{\mathbf{A}}$ и нормализованную систему уравнений

$$\bar{\mathbf{A}}\vec{X} = \delta\vec{\bar{S}} \tag{13}$$

После этого, сингулярное разложение (Singular Value Decompozition, SVD)[12] приводит матрицу $\bar{\mathbf{A}}$ к виду

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{U}\cdot\mathbf{W}\cdot\mathbf{V}^T, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_{\{M\times N\}}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}_{\{N\times N\}}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_{\{N\times N\}} \tag{14}$$

где $\mathbf{U}$ прямоугольная матрица с орто-нормированными столбцами

$$\mathbf{U}^T\cdot\mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad (\mathbf{I})_i^k = \delta_i^k, \tag{15}$$

$\mathbf{I}$ - единичная матрица, $\mathbf{W}$- диагональная матрица, содержащая собственные значения w^k задачи,

$$(\mathbf{W})_i^k = w^k\delta_i^k, \tag{16}$$

а столбцы матрицы $\vec{V}^k$ представляют собственные орто-нормированные вектора

$$\mathbf{V}^T\cdot\mathbf{V} = \mathbf{I}, \quad (\vec{V}^k)_i \equiv (\mathbf{V})_i^k, \quad (\vec{V}^i)^T\cdot\vec{V}^k = \delta_i^k \tag{17}$$

Для целей реконструкции равновесия каждый собственный вектор следует пронормализовать, основываясь на физическом возмущении, например, чтобы амплитуда возмущения плотности тока, соответствующая собственному возмущению была равна амплитуде базового распределения тока, то есть максимуму $\bar{j}_s(a), \bar{j}_p(a)$

$$\vec{X}^k = \gamma^k \vec{V}^k, \quad \bar{w}^k = \gamma^k w^k. \tag{18}$$

Здесь $\vec{X}^k$ - окончательные собсвенные вектора и $\bar{w}^k$- их собственные значения.

Основываясь на SVD-расложении, вычисление стандарных отклонений $\bar{\sigma}^{\,k}_{Signal}$ в сигналах для собственных векторов является простым

$$\delta\vec{\bar{S}}^k = \bar{\mathbf{A}}\vec{X}^k = \gamma^k w^k \vec{U}^k, \quad \bar{\sigma}^{\,k}_{Signal} \equiv \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{m<M}(\delta\bar{S}^k_m)^2} = \frac{\gamma^k w^k}{\sqrt{M}} \tag{19}$$

и позволяет ввести определение "собственных вариаций" $\bar{\sigma}^k$, ассоциированных с каждым собственным возмущением $\vec{X}^k$,

$$\bar{\sigma}^k \equiv \frac{1}{\bar{\sigma}^{\,k}_{Signal}} = \frac{\sqrt{M}}{\gamma^k w^k}. \tag{20}$$

Вариации $\bar{\sigma}^k$ имеют простой физический смысл: они определяют амплитуду возмущения решения уравнения Грэда-Шафранова,

$$\bar{\sigma}^k\vec{X}^k = \bar{\sigma}^k \left\{ \underbrace{A^k_0, A^k_1, \ldots, A^k_{N_\xi-1}}_{N_\xi \;\; of \quad \xi^n}, \underbrace{T^k_0, \ldots, T^k_{N_J-1}}_{N_J \;\; of \quad \delta T^n}, \underbrace{P^k_0, \ldots, P^k_{N_p-1}}_{N_p \;\; of \quad \delta P^n} \right\} \tag{21}$$

$$\xi^k(\theta) = \bar{\sigma}^k \sum_{n=0}^{n<N_\xi} A^k_n \xi^n(\theta), \quad \delta T^k = \bar{\sigma}^k \sum_{n=0}^{n<N_J} T^k_n f^n(a), \quad \delta P^k = \bar{\sigma}^k \sum_{n=0}^{n<N_P} P^k_n f^n(a) \tag{22}$$

которое даёт сигналы на диагностиках с нормализованным стандартным отклонением равным 1, то есть как раз на пределе детектирования. Это и определяет важность собственных вариаций $\bar{\sigma}^k$ для реконструкции равновесия (или источников в общей задаче реконструкции): *Собственные возмущения $\vec{X}^k$ с $\bar{\sigma}^k < 1$, $\log_{10}\bar{\sigma}^k < 0$ детектируются диагностикой (и могут быть отфильтрованы при реконструкции), в то время как с $\log_{10}\bar{\sigma}^k > 0$ являются "невидимыми" при заданном уровне точности измерений и не могут быть определены при реконструкции без допполнительной информации. Число вариаций с $\log_{10}\bar{\sigma}^k < 0$ в полном спектре $\bar{\sigma}^k$ может служить количественной мерой качества диагностической системы.*

В дальнейшем возмущения с $\log\bar{\sigma}^k \leq -1$ будут квалифицироваться как а) "хорошо заметные", или "рекоструируемые", б) "мало заметные" с $-1 < \log_{10}\bar{\sigma}^k \leq 0$ и в) "невидимые" с $0 < \log_{10}\bar{\sigma}^k$. Различие между видимыми и невидимыми возмущениями

становится наглядным при использовании σ-кривых, являющимися графиками $\log_{10}\bar{\sigma}^k$ как функции индекса k. Пересечение σ-кривых с нулевым уровнем разделяет видимые и невидимые возмущения.

Используя решение $\bar{\Psi}+\psi^k$линеаризованного уравнения (5), для каждого собственного возмущения можно ввести вариации для отдельных физических величин, например, для профилей запаса устойчивости q и давления p

$$\bar{\sigma}_q^k \equiv \sqrt{\int_0^1 (\delta q^k)^2 da} \propto \bar{\sigma}^{\,k}, \quad \bar{\sigma}_p^k \equiv \frac{1}{p_0}\sqrt{\int_0^1 (\delta p^k)^2 da} \propto \bar{\sigma}^{\,k}, \tag{23}$$

где p_0 это нормировочное значение давления. Для случая ИТЭРа, рассмотренного здесь,$p_0 = 1$MPa. Все специфические вариации пропорциональны собственным вариациям $\bar{\sigma}^k$. Численно, вариации в интегральных величинах меньше чем вариации, отражающие неопределённости в востановлении плотности тока.

Следующая секция даёт примеры вычислений σ-кривых для разных комбинаций диагностик для случая магнитной конфигурации ИТЭРа.

III. Возможности реконструкции равновесия в итэре с MSE-LP и MSE-LS сигналами

Диагностическая система, анализируемая в настоящей работе, является модельной и использована для предварительного определения возможностей диагностического сигнала MSE-LS для реконструкции равновесия в сравнении с использованием либо MSE-LP лобо одних внешних магнитных измерений. Таблица 1 даёт параметры точности такой модельной диагностики

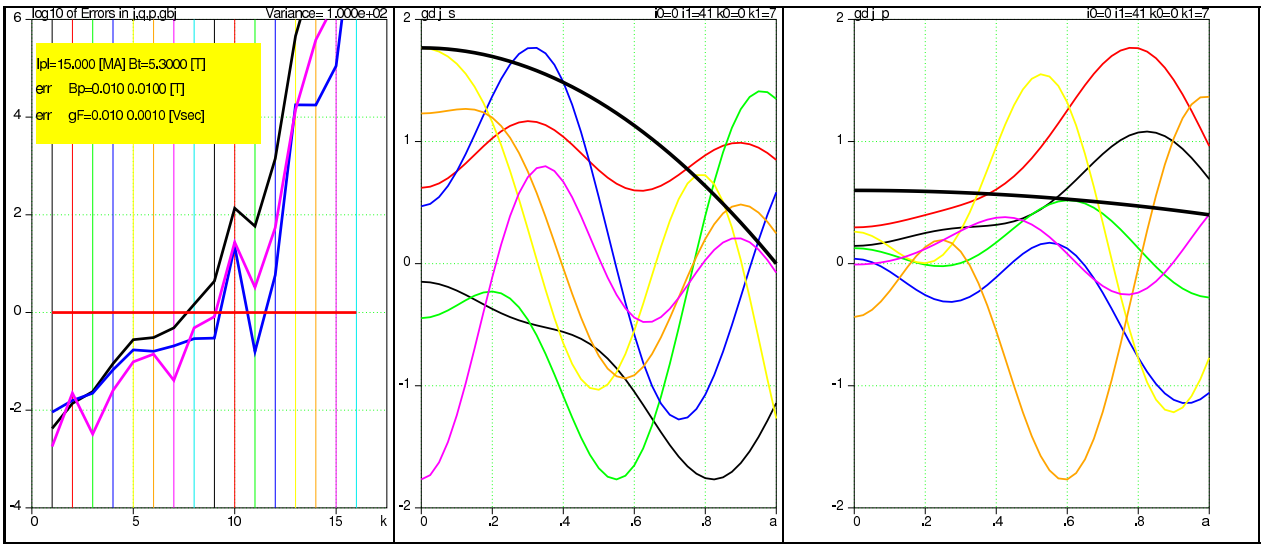
Сигнал	Количество	$\epsilon^{relative}$	$\epsilon^{absolute}$	Коментарий Таблица 1
B - зонд	64	0.01	0.01 T	сигнал с локальных магнитных зондов
Ψ- петля	32	0.01	0.001 Vsec	полоидальный поток магнитного поля
Φ- петля	1	0.01	0.001 Vsec	диамагнитный сигнал $\int_{plasma}(B_{\phi,vac} - B_\phi)dS$
MSE-LP	21	0.01	0.1^o	локальное значениеB_z/B_ϕ из поляризации линии Штарка
MSE-LS	21	0.001	0.05 T	$\sqrt{\lvert\mathbf{B}\rvert^2 - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{v})^2}$ из смещения линии Штарка

Здесь $B_{\phi,vac}$ представляет вакуумное тороидальное магнитное поле, а $\mathbf{v}$ единичный вектор вдоль пучка нейтральной инжекции, возбуждённые атомы которой дают сигналы на оптических линиях модифицированных Штарк эффектом.

В данной работе предполагается, что сигналы MSE точечные. В дальнейшем это предположение должно быть заменено на более реалистическую модель.

A. Вариации при использовании только внешних магнитных измерений

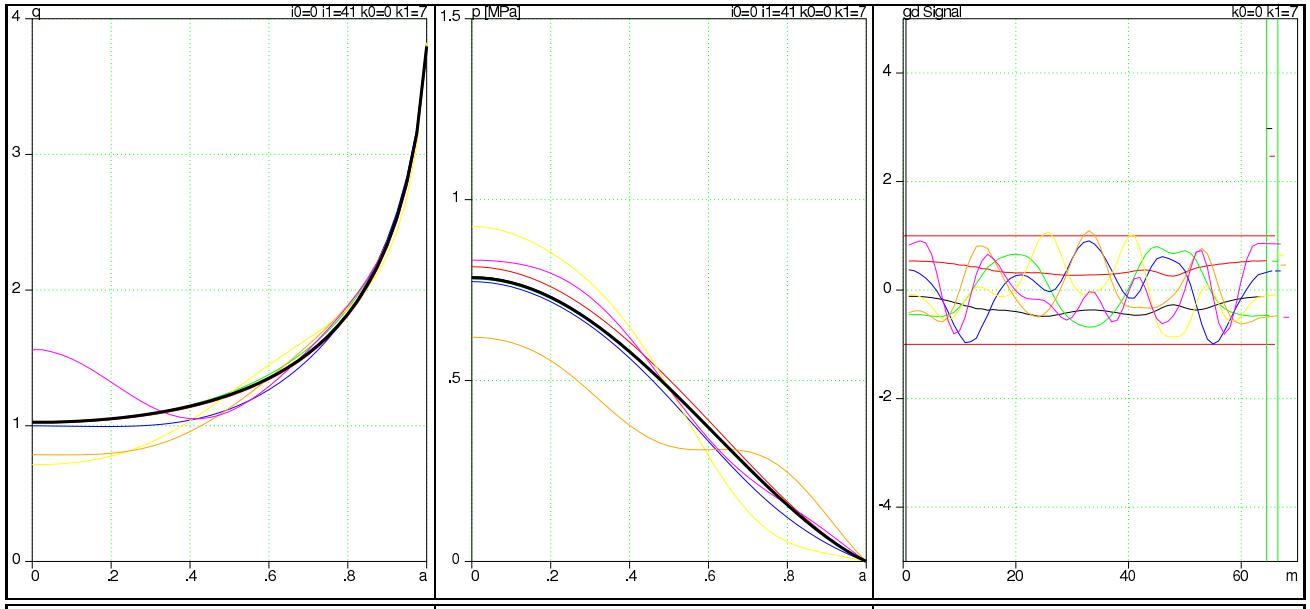
На Рис.3 показаны σ-кривые и нормализованные собственные возмущения $\delta\bar{j}_s^k(a), \delta\bar{j}_p^k(a)$ в случае использования только внешних магнитных измерений (сигналов B, Ψ, Φ). Цвет на Рис.3б,в отражает номер собственного возмущения.



а)	б)	в)

Рис.3. *а) σ- кривые $\log_{10}\bar{\sigma}_p^{kk}$ (чёрная линия), $\log_{10}\bar{\sigma}_q^k$ (синяя линия), $\log_{10}\bar{\sigma}_p^k$ (фиолетовая линия) как функции k для плотности тока, профиля q и давления p. б) базовое Распределение $\bar{j}_s(a)$(жирная линия) и нормализованные собственные возмущения $\delta\bar{j}_s^k(a)$. в) Распределение $\bar{j}_p(a)$(жирная линия) и нормализованные собственные возмущения $\delta\bar{j}_p^k(a)$.*

Кривые вариаций показывают, что только 7 собственных возмущений могут быть рекоструированы на основе магнитных сигналов. Причём только 4 из них будут соответствовать “хорошо заметным” возмущениям в плотности тока при их амплитуде 10% от базового уровня, те есть когда ещё можно полагаться на линейную теорию. Амплитуда “мало заметных” возмущений с $-1 \leq \log_{10}\bar{\sigma}^k \leq 0$ (в данном случае с $k = 5, 6, 7$), будучи подогнанной под чувствительность диагностики, находится за рамками линейной теории, хотя ещё меньше базового уровня тока. Тем не менее, можно надеяться на качественную справедливость результатов линейной теории вариаций для этой части спектра собственных возмущений. С этой оговоркой надо интерпретировать расчёты вариаций в конкретных случаях, рассмотренных ниже.



а)	б)	в)

Рис.4. *Собственные вариации профилей а) $q(a)$ и б) $p(a)$в диапазоне $1 \leq k \leq 7$. в) Нормализованные сигналы $\delta\bar{S}_m = \delta S_m/\epsilon_m$ на B-зондах ($0 \leq m < 64$) и диамагнитной петле ($m = 64$) от собственных вариаций равновесия. Горизонтальные линии $\delta\bar{S}_m = \pm 1$ отмечают область "невидимости" сигналов $|\delta S_m| < \epsilon_m$.*

Рис.4а,б показывают, как собственные вариации транслируются в неопределённости реконструкции профилей $q(a)$ и $p(a)$. Рис.4в показывает, что амплитуды сигналов от собственных возмущений надятся внутри зоны "невидимости". Независимо от того, сколько свободных параметров было использовано при получении базового решения, только 4 собстенных возмущений могут быть реконструированы, оставляя существенные неопределённости в профилях $q(a)$ и $p(a)$, связанных с "мало заметными" ($k = 5, 6, 7$) или "невидимыми" ($k > 7$) варициями равновесия.

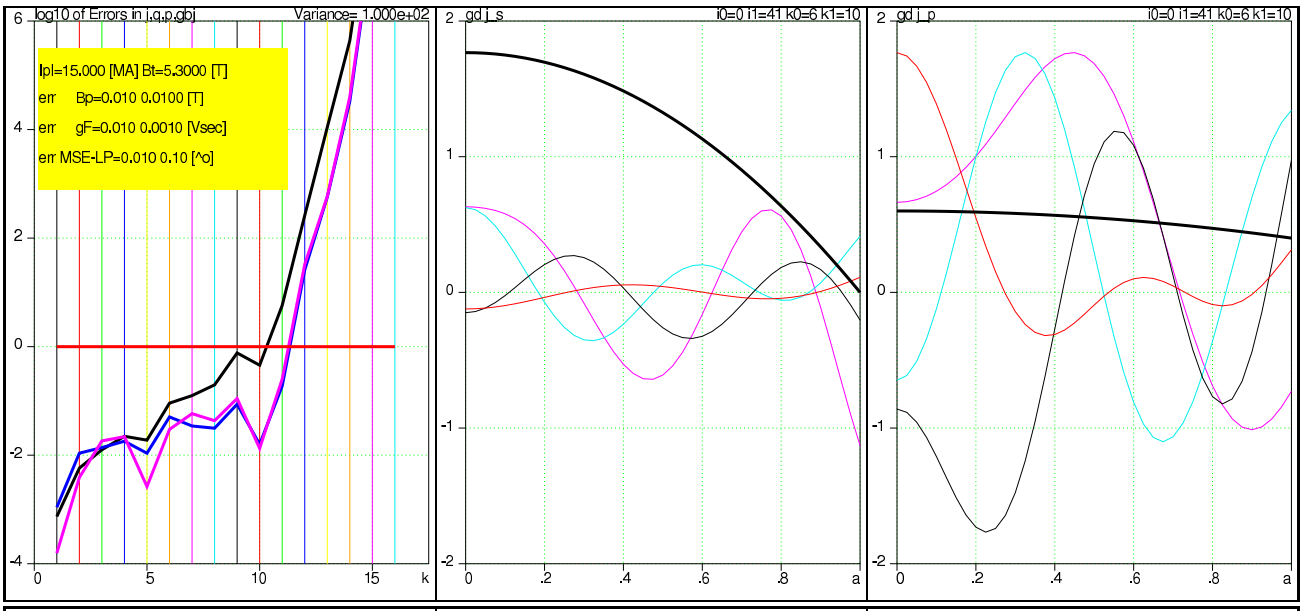
Отметим, что увеличение точности внешних измерений заметно не улучшает ситуацию. Так равномерное уменьшение погрешностей измерений $\epsilon^{relative}, \epsilon^{absolute}$ в 10 раз сдвинуло бы σ-кривые вниз на одну единицу. Поскольку наклон этих кривых значителен, это добавило бы только 2 реконструируемых возмущения. Гораздо более эффективным является использование диагностик, дающих новую информацию вместо уточнения старой.

B. Эффект использования сигналов поляризации линии Штарка MSE-LP

Поведение σ-кривых как функций k явно указывает, что даже в токамаках с некруглым сечением на основе одних только внешних измерений возмущения плотности тока с умеренными k не могут быть реконструированы. Для реконструкции требуются внутренние измерения. Сигнал поляризации линии Штарка от атомов пучка нейтральной инжекции при их движении в магнитном поле позволяет определить локальное отношение магнитных полей

$$S_{m,MSE-LP} = \left.\frac{B_z}{B_\phi}\right|_m \tag{24}$$

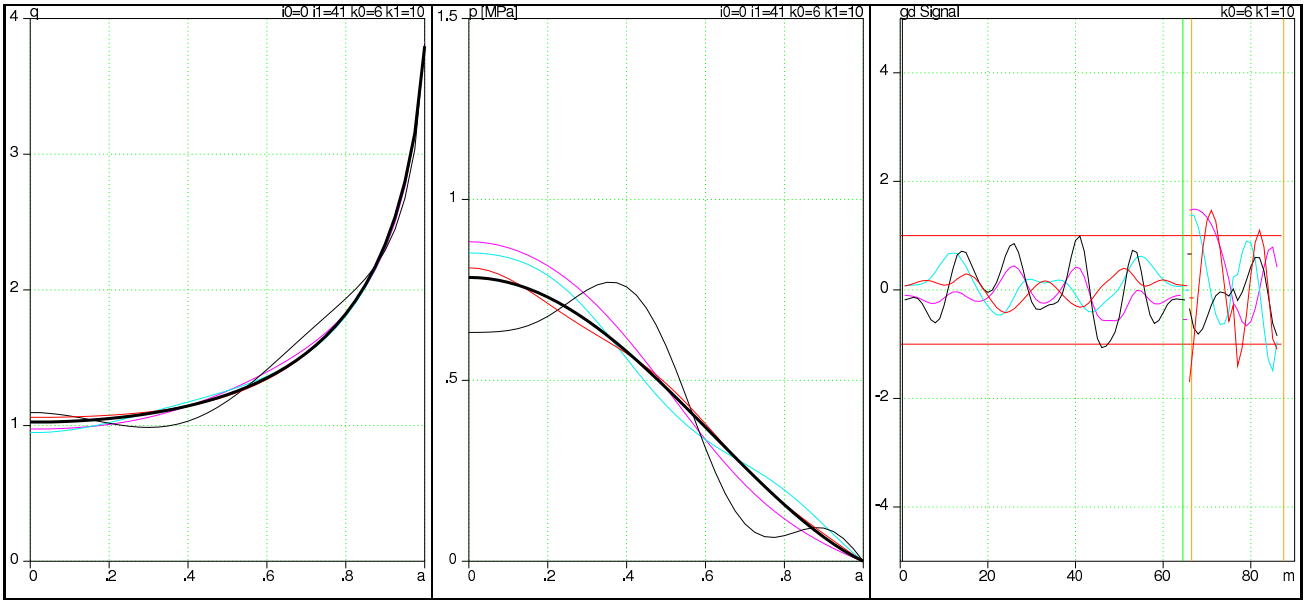
Добавление 21 сигнала MSE-LP существенно меняет наклон σ-кривых и расширяет спектр видимых возмущений. Как следует из Рис.5а, вместо 4 в случае внешних возмущений, расширенная диагностическая система видит 7 собственных возмущений. Нормализованные собственные возмущения в диапазоне "мало заметных" для этого случая возмущений $k = 7, 8, 9, 10$ ("невидимых" при использовании только магнитных возмущений) показаны на Рис.5б,в.



а)	б)	в)

Рис.5. *а) σ- кривые $\log_{10}\bar{\sigma}^k, \log_{10}\bar{\sigma}^k_q, \log_{10}\bar{\sigma}^k_p$ для плотности тока, профиля q и давления p при использовании сигналов MSE-LP. б) Базовое распределение $\bar{j}_s(a)$(жирная линия) и нормализованные собственные возмущения $\delta\bar{j}^k_s(a)$. в) Распределение $\bar{j}_p(a)$(жирная линия) и нормализованные собственные возмущения $\delta\bar{j}^k_p(a)$.*

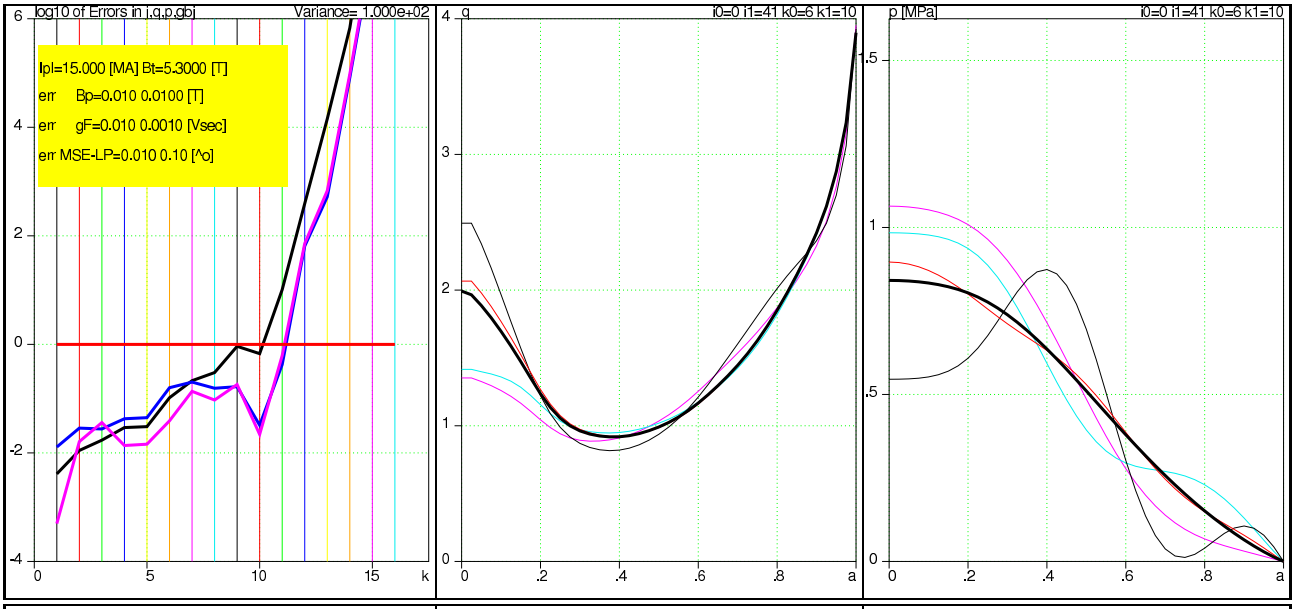
Рис.6 показывает, что сигналы MSE-LP во всём диапазоне $1 \leq k \leq 10$ дают возможность восстанавливать с хорошей точностью профиль $q(a)$ и вполне удовлетворительно профиль $p(a)$.



а)	б)	в)

Рис.6. *Собственные вариации профилей а) $q(a)$ и б) $p(a)$в диапазоне $7 \leq k \leq 10$. в) Нормализованные сигналы $\delta\bar{S}_m = \delta S_m/\epsilon_m$ на B-зондах ($0 \leq m < 64$), диамагнитной петле ($m = 64$) и MSE-LP сигналы ($65 \leq m < 86$) от собственных вариаций равновесия. Горизонтальные линии $\delta\bar{S}_m = \pm 1$ отмечают область "невидимости" сигналов $|\delta S_m| < \epsilon_m$.*

Для случая немонотонного распределения тока (с обращённым широм) σ-кривые вариации профилей $q(a)$ и $p(a)$ в том же диапазоне k приведён на Рис.7.



а)	б)	в)

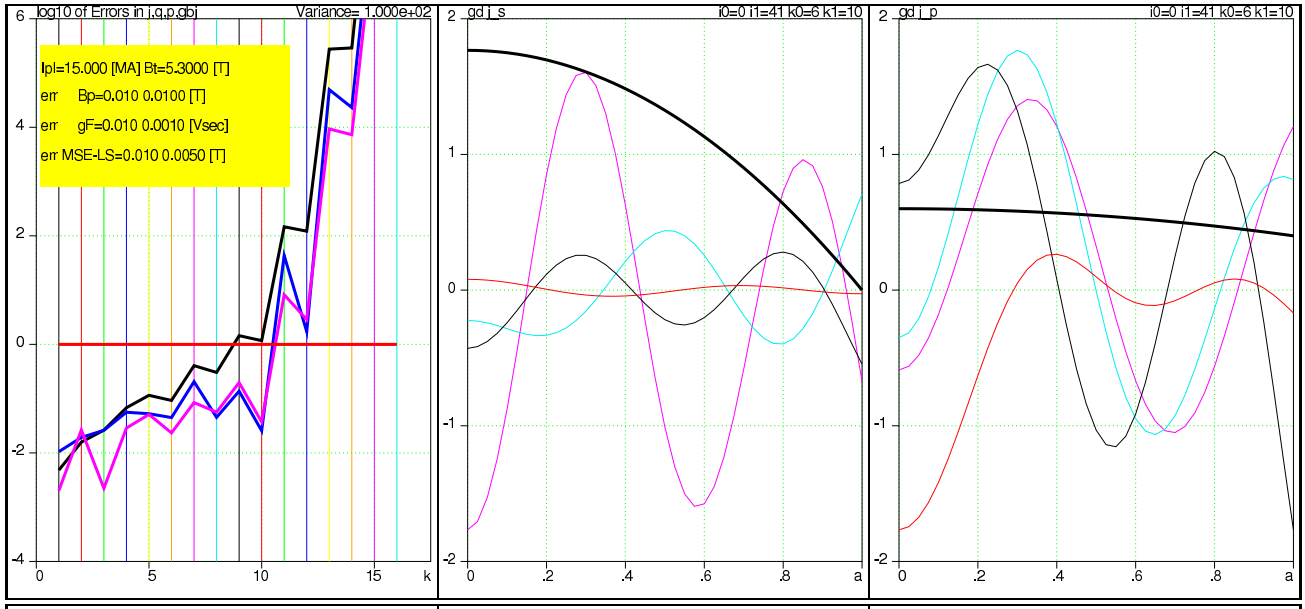
Рис.7. *а) σ-кривые $\log_{10}\bar{\sigma}^k, \log_{10}\bar{\sigma}^k_q, \log_{10}\bar{\sigma}^k_p$ плотности тока, профиля q и давления p для конфигурации в обращённым широм при использовании сигналов MSE-LП. б) Собственные вариации профиля $q(a)$ и в) профиля $p(a)$ в диапазоне $7 \leq k \leq 10$.*

C. Эффект сигнала сдвига линии Штарка MSE-LS на реконструкцию равновесия

Измерение сдвига линии Штарка MSE-LS возбуждённых атомов нейтральной инжекции даёт информацию о компоненте магнитного поля, поперечной к траекториям атомов в пучке,

$$S_{m,MSE-LS} = \mathbf{B}_{\perp}| \equiv \sqrt{|\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{v})^2}\Big|_m , \tag{25}$$

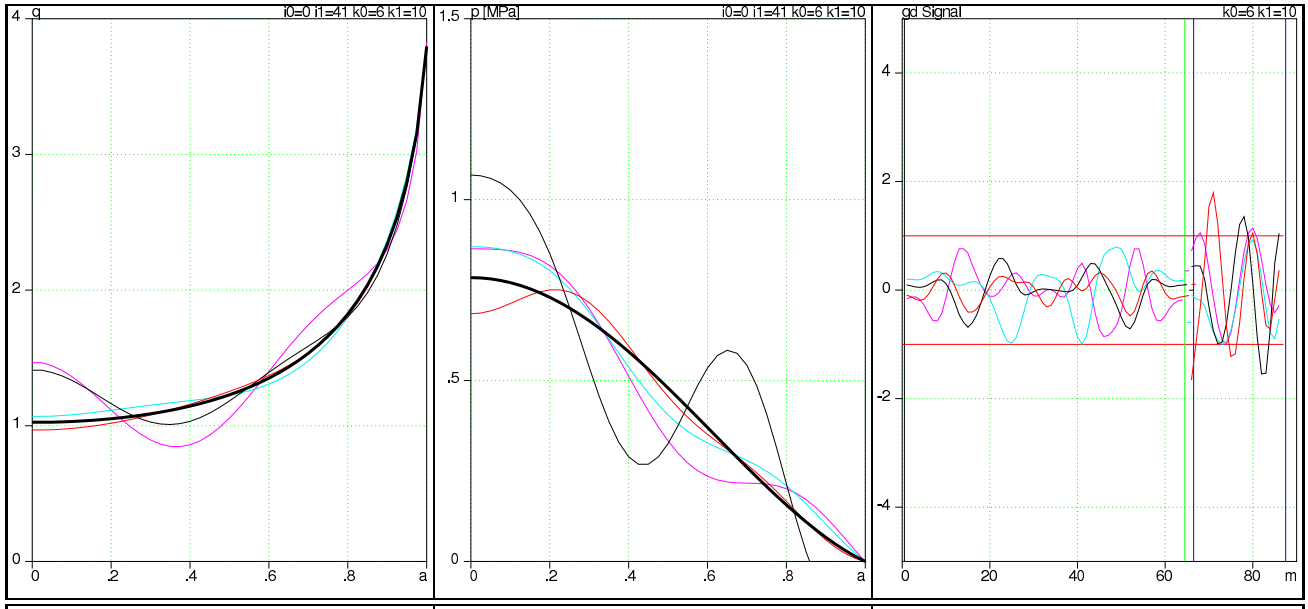
где $|\mathbf{B}|$ - модуль полного магнитного поля, $\mathbf{v}$- единичный вектор вдоль траетории пучка. Рис. 8,9 показывают, что хотя восстановление профилей q и p хуже, чем при использовании сигналов о питч угле MSE-LP, сигнал MSE-LS всё же позволяет удовлетворительно восстановить эти профили для собственных возмущений с $1 \leq k \leq 8$.



а)	б)	в)

Рис.8. а) σ-кривые $\log_{10}\bar{\sigma}^k, \log_{10}\bar{\sigma}^k_q, \log_{10}\bar{\sigma}^k_p$ для плотности тока, профиля q и давления p при использовании сигналов MSE-LS. б) Базовое распределение $\bar{j}_s(a)$ (жирная линия) и нормализованные собственные возмущения $\delta\bar{j}^k_s(a)$. в) Распределение $\bar{j}_p(a)$ (жирная линия) и нормализованные собственные возмущения $\delta\bar{j}^k_p(a)$.

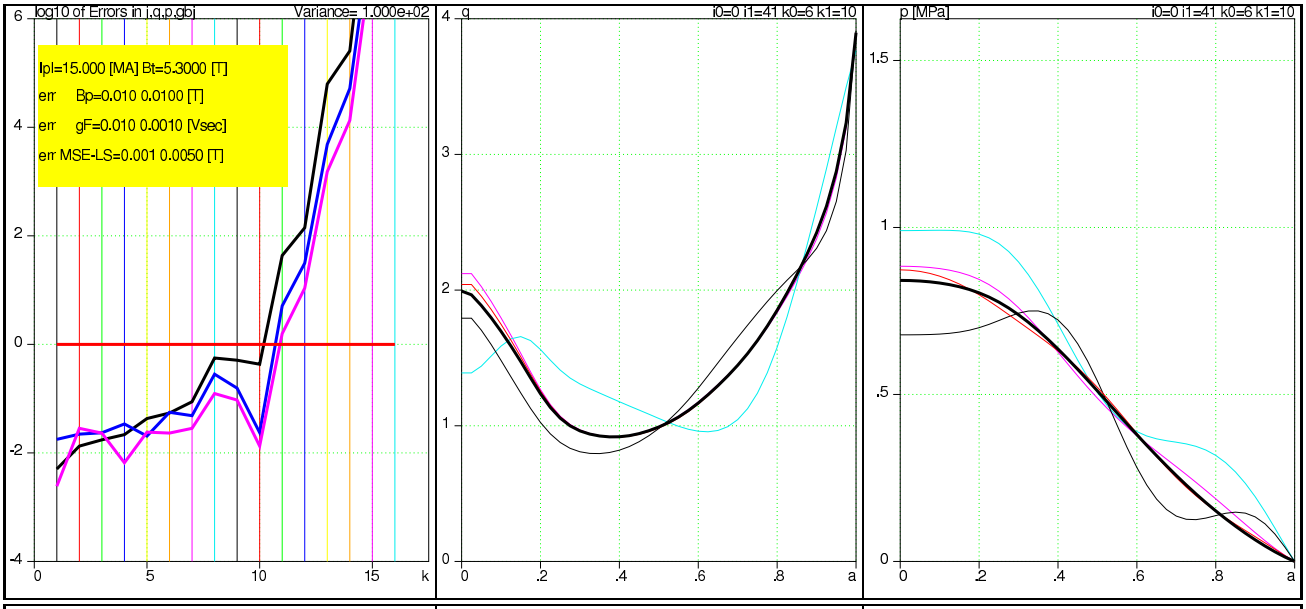
Вблизи магнитной оси сигналы MSE-LS мало чувствительны к распределениям тока и давления и для улучшения реконструкции равновесия необходима дополнительная информация о зоне вблизи центра плазменного шнура (например, положение резонансной поверхности $q = 1$).



а)	б)	в)

Рис.9. *Собственные вариации профилей а)* $q(a)$ *и б)* $p(a)$*в диапазоне* $7 \leq k \leq 10$. *в) Нормализованные сигналы* $\delta\bar{S}_m = \delta S_m/\epsilon_m$
на B*-зондах (*$0 \leq m < 64$*) и диамагнитной петле (*$m = 64$*) и MSE-LS сигналы (*$65 \leq m < 86$*) от собственных вариаций равновесия. Горизонтальные линии* $\delta\bar{S}_m = \pm 1$ *отмечают область "невидимости" сигналов* $|\delta S_m| < \epsilon_m$.

Предыдущий пример (Рис.7) вариаций в конфигурации с немонотонным профилем тока при использовании сигналов MSE-LS характеризуется вариациями, показанными на Рис.10. Как и ранее, распределение тока мало влияет на возможность диагностической системы реконструировать равновесие.



а)	б)	в)

Рис.10. *а) σ-кривые $\log_{10}\bar{\sigma}^k, \log_{10}\bar{\sigma}^k_q, \log_{10}\bar{\sigma}^k_p$ плотности тока, профиля q и давления p для конфигурации в обращённым широм при использовании сигналов MSE-LS. б) Собственные вариации профиля $q(a)$ и в) профиля $p(a)$ в диапазоне $7 \leq k \leq 10$.*

IV. Заключение.

В данной работе представлен строгий метод оценки качества реконструкции равновесия, основанный на вычислении спектра собственных возмущений (вариаций), которые могут быть восстановлены с хорошей точностью, плохо различимые, и те которые остаются за пределами разрешения конкретной диагностики. Сделанное на основе данной теории сравнение использования одних только магнитных измерений с их дополнением либо сигналами MSE-LP (поляризации линии Штарка) или сигналами MSE-LS (сдвига линии Штарка) показывает исключительную важность информации из ядра плазмы. В частности, для ИТЭРа показано, что для реконструкции профилей $q(a)$ и $p(a)$сигналы MSE-LS могут (за исключением самой центральной области плазмы) заменить используемые в настоящее время сигналы MSE-LP, надёжное получение которых в ИТЭРе может быть проблематично.

Хотя в данной работе рассмотрен только модельный пример, иллюстрирующий применение изложенной теории вариаций, рассмотренная методика напрямую распорстраняется на анализ реальных диагностик, используемых для реконструкции равновесия

плазмы. Помимо технических вопросов, связанных с учётом множества деталей воплощения конкретных диагностик, принципиальным является их калибровка и определение точности сигналов в реальных условиях. В частности, особую важность имеет замена точечной модели сигналов MSE-LP и MSE-LS на интегрированную модель, учитывающую параметры и геометрию пучка нейтральной инжекции и нелокальность в источнике излучения.

Acknowledgments

Эта работа поддержана контрактом US DoE No. DE–AC020–76–CHO–3073.

---

[1] A. V. Bortnikov, Y. T. Baiborodov, N. N. Brevnov, L. E. Zakharov, V. G. Zhukovskii, D. V. Orlinskii, V. I. Pergament, M. K. Romanovskii, N. I. Sokolov, and Y. M. Us, in *Proceedings of Contributed Papers, 6th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Moscow, 1973* (European Physical Society, Plasma Physics Division, published by Joint Institute for Nuclear Research, Moscow, 1973), vol. 2, p. 349.

[2] L. L. Lao, H. S. John, R. D. Stambaugh, A. G. Kellman, and W. Pfeiffer, Nucl. Fusion **25**, 1611 (1985).

[3] L. L. Lao, J. R. Ferron, R. J. Groebner, W. Howl, H. S. John, E. J. Strait, and T. S. Taylor, Nucl. Fusion **30**, 1035 (1990).

[4] V. D. Shafranov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33**, 710 (1957), Sov. Phys. JETP **6**, 545 (1958).

[5] H. Grad and H. Rubin, in *Proceedings of the Second United Nations Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy* (UN, Geneva, 1958), vol. 21, p. 190.

[6] F. M. Levinton, R. J. Fonck, G. M. Gammel, R. Kaita, H. W. Kugel, E. T. Powell, and D. W. Roberts, Phys. Rev. Letters **63**, 2060 (1989).

[7] F. D. Marco and S. E. Segre, Plasma Phys. **14**, 245 (1972).

[8] H. Soltwisch, Rev. Sci. Instruments **57**, 1939 (1986).

[9] W. P. West, D. M. Thomas, J. S. deGrassie, and S. B. Zheng, Phys. Rev. Letters **58**, 2758 (1987).

[10] K. McCormick, F. X. Soldner, D. Eckhartt, F. Leuterer, H. Murmann, H. Derfler, A. Eberhagen, O. Gehre, J. Gernhardt, G. v. Gierke, et al., Phys. Rev. Letters **58**, 491 (1987).

[11] L. E. Zakharov and A. Pletzer, Phys. of Plasmas **6**, 4693 (1999).

[12] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, in *Numerical Recipes in C* (Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourn, Sydney, 1992), pp. 59–70.

The Princeton Plasma Physics Laboratory is operated
by Princeton University under contract
with the U.S. Department of Energy.

Information Services
Princeton Plasma Physics Laboratory
P.O. Box 451
Princeton, NJ 08543

Phone: 609-243-2750
Fax: 609-243-2751
e-mail: pppl_info@pppl.gov
Internet Address: http://www.pppl.gov